Ορισμός: Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο

α) Για $x, y \in H$, τα x, y λέγονται κάθετα ή ορθογώνια αν $\langle x, y \rangle = 0$ $(x \perp y)$

β) Για $x \in H$, $A \subset H$ λέμε ότι το $x \perp A$ αν $x \perp y$, $\forall y \in A$

γ) Μια οικογένεια διανυσμάτων $\{x_i : i \in I\}$ λέγεται ορθογώνια αν $x_i \perp x_j$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$

δ) Μια οικογένεια διανυσμάτων $\{e_i : i \in I\}$ λέγεται ορθοκανονική αν $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Παρατηρήσεις

α) $0 \perp x$ $\forall x \in H$. και το 0 είναι το μοναδικό διάνυσμα με αυτή την ιδιότητα.

β) Αν $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμ. ανεξ. σύνολο

Απόδ (β)

Αν $i_1, \ldots, i_n \in I$ διαφορετικά ανά δύο και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_{i_k} = 0$

Τότε $\forall j = 1, \ldots, n : 0 = \langle 0, e_{i_j} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle =$
$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j \Rightarrow \{e_i : i \in I\}$ γραμμ. ανεξάρτητα

Πρόταση

α) Αν $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

β) Αν $x_1, \dots, x_n$ ορθογώνια, τότε:

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

γ) Αν $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονικά, τότε:

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\|^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Αποδ.

α) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

β) Επαγωγικά από το (α).

γ) Από το (β) τα $e_1, \dots, e_n$ ορθογώνια. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n$ ορθογώνια

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\|^2 = \lambda_1^2 \|e_1\|^2 + \dots + \lambda_n^2 \|e_n\|^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα γραμμ. ανεξάρτητο σύνολο. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική ακολουθία $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ώστε:

$$\mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Απόδ (επιγραμματικά)

Επαγωγικά ορίζονται τα $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$

λόγω γραμμ. ανεξαρτησίας $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Θέτουμε $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ τότε $\|e_1\| = 1$ και $Span\{e_1\} = Span\{x_1\}$

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $e_1, \dots, e_n$ τ.ω

$<e_i, e_j> = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$ και $Span\{e_1, \dots, e_n\} = Span\{x_1, \dots, x_n\}$

Ορίζουμε ως $y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} <x_{n+1}, e_i> \cdot e_i \neq 0$

και $<y_{n+1}, e_k> = 0$, $\forall k = 1, \dots, n$

Θέτουμε $e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$. Τότε, $\|e_{n+1}\| = 1$, $<e_{n+1}, e_j> = 0$ $\forall j = 1, 2, \dots, n$

Και εύκολα ελέγχεται ότι $Span\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\} = Span\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

Παρατήρηση

Αν H χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $F \subset H$ με $\dim F = n \Rightarrow F$ έχει μια Hamel βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$

Με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt καταλήγουμε σε μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του υποχώρου F. Κάθε $x \in F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$: $<x, e_k> = <\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_k> =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <e_i, e_k> = \lambda_k$.

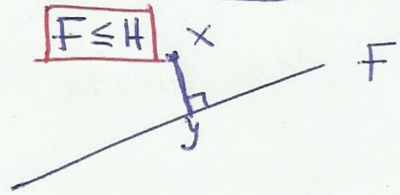
Άρα, $x = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$ και απο το Πυθ. Θεωρ.

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i>^2$.

Υπενθύμιση: Ένα $A \subseteq$ δ.χ X λέγεται κυρτό

αν $\forall x, y$ εν A, $\forall \lambda \in (0,1)$: $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$

Θεώρημα: Έστω H χώρος Hilbert και έστω F κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε, $\forall x \in H, \exists! y \in F$ ώ/ω $\|x-y\| = d(x,F) := \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$.
Επιπλέον, αν F κλειστός υπόχωρος του H τότε θα ισχύει: $x - y \perp F$



Απόδειξη

Θεωρούμε $d = d(x,y)$

Από τον κανόνα του Παραλληλογράμμου.

$\forall y$ & y' εν F για τα διανύσματα $y-x$ και $y'-x$ ισχύει:

$$2\|y-x\|^2 + 2\|y'-x\|^2 = \|y+y'-2x\|^2 + \|y-y'\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\|y-y'\|^2 = 2\|y'-x\|^2 + 2\|y-x\|^2 - 4\left\|\frac{y+y'}{2} - x\right\|^2$$

Εφόσον F κυρτό και y, y' εν F τότε $(y+y')\frac{1}{2} \in F$

Τότε, $\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\| \geq d(x,F) = d$.

Άρα, $\|y-y'\|^2 \leq 2\|y'-x\|^2 + 2\|y-x\|^2 - 4 \cdot d^2 \quad \forall y, y'$ εν F (1)

Μοναδικότητα: Αν y, y' εν F με $\|y-x\| = d = \|y'-x\| \overset{\text{οδο}}{\Longrightarrow} y = y'$

όπου από την (1): $\|y-y'\|^2 \leq 0 \Rightarrow y = y'$.

Ύπαρξη: Επιλέγουμε $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν F ώστε $\lim_n \|x-y_n\| = d$

(εφόσον d είναι το $\inf_{y\in F} \|x-y\|$). Οδο $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική

Από την (1) για $y = y_n$ και $y' = y_m$ έπεται:

$$\|y_n - y_m\| = 2\cdot\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2, \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

Για $n,m \to \infty$: $\|y_n - y_m\| \to 0 \Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική

Και αφού H είναι Hilbert $\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

Έστω $y = \lim y_n$ και αφού F κλειστό $\Rightarrow y \in F$

Άρα, $\|x - y\| = \|x - \lim_n y_n\| = \lim_n \|x - y_n\| = d$.

Αν επιπλέον F κλειστός υπόχωρος του H (υπόχωρος $\Rightarrow$ κυρτός)

$\forall z \in F$ δ.δ.ο. $x - y \perp z$

Έστω λοιπόν $z \in F \overset{F\leq H}{\Rightarrow} \forall \lambda \in \mathbb{R}: y + \lambda z \in F$

Άρα, $\|x-y\|^2 \leq \|x - y - \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda\langle x-y, z\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\langle x-y, z\rangle \leq \lambda^2 \cdot \|z\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lambda > 0$: $2\langle x-y, z\rangle \leq \lambda \cdot \|z\|^2 \xrightarrow{\lambda \to 0} \langle x-y, z\rangle \leq 0$
- $\lambda < 0$: $2\langle x-y, z\rangle \geq \lambda \cdot \|z\|^2 \xrightarrow{\lambda \to 0} \langle x-y, z\rangle \geq 0$

(ή αφού $F \leq H \Rightarrow -z \in F \Rightarrow \langle x-y, -z\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x-y, z\rangle \geq 0$)

Άρα, $\langle x-y, z\rangle = 0, \ \forall z \in F \Rightarrow x - y \perp F$.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση όπου F κλειστός υπόχωρος, το y που βρήκαμε προηγουμένως (δηλ. το $y \in F : \|x-y\| = d(x,F)$) είναι το μοναδικό σημείο του F για το οποίο $y' \in F$ ώστε $x - y' \perp F$

Αποδ.

Πράγματι, αφου $y, y' \in F$ και $F \leq H \Rightarrow y' - y \in F$

επεται ότι $x - y' \perp y' - y \overset{\text{Π.Θ.}}{\Longrightarrow} \|x - y' + y' - y\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|y' - y\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|y' - y\|^2 \Rightarrow d^2 = \|x - y'\|^2 + \|y - y'\|^2$

$\Rightarrow \|x - y'\|^2 \leq d^2 \underset{d \text{ ελαχ.}}{\Longrightarrow} \|x - y'\|^2 = d^2 \Rightarrow \|x - y'\| = d \overset{\text{Προηγ.}}{\underset{\text{Θεωρ.}}{\Longrightarrow}} y = y'$

Δυϊκος χωρου Hilbert

· Εστω H χώρος Hilbert και έστω $x \in H$

Ορίζουμε $f_x : H \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_x(y) = \langle x, y \rangle$

f_x γραμμικο και συνεχὲς συναρτησοειδες, αφού:

$\forall y \in H : |f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Εντουτοις, $f_x \in H^*$ με $\|f_x\| \leq \|x\|$.

Μαλιστα δε, $\|x\| \leq \|f_x\|$.

Αν $x = 0 \Rightarrow$ ισχυει.

διοτι $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$

Αν $x \neq 0 \Rightarrow \|f_x\| \geq f_x\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle = \|x\|$.

Αρα, $\boxed{\|f_x\| = \|x\|}$

<u>Συμβολισμος</u>: Αν $A \subset H$ θετουμε ως

$A^\perp = \{ x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in A \}$. ορθογώνιο συνολο του A.

<u>Ισχυρισμος</u>: $A^\perp$ είναι <u>πάντα</u> κλειστός υπόχωρος

$$A^\perp = \bigcap_{y \in A} \{ x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \} = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{y \in A} \ker f_y$$

κλειστος υπόχωρος ως τομή κλειστών υποχώρων

Πόρισμα: Ας είναι H χώρος Hilbert και F κλειστός (γνήσιος) υπόχωρος του H $\Rightarrow$ $F^{\perp} \neq \{0\}$

Απόδειξη

Έστω $x \in H \setminus F$

Αν $y \in F$ όπως στο προηγούμενο θεώρημα $\|x-y\| = d(x,F)$

Τότε $x-y \perp F \longrightarrow x-y \in F^{\perp} \setminus \{0\}$

Θεώρημα

Έστω H χώρος Hilbert. Τότε η συνάρτηση $T: H \to H^*$ με $T(x) := f_x$ (όπως ορίσαμε προηγουμένως). Δηλαδή $T(x)(y) = \langle x, y \rangle$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός

Άρα, κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του

Απόδειξη

$f_x \in H^*$ $\forall x \in H$ και $\|f_x\| = \|x\|$

Εύκολα βλέπουμε ότι T είναι γραμμικός τελεστής αφού $\forall x_1, x_2 \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $f_{\lambda x_1 + \mu x_2} = \lambda \cdot f_{x_1} + \mu \cdot f_{x_2}$.

Έστω τώρα ένα $f \in H^*$ και θδο T επί

Αν $f = 0$ προφανώς $f = f_0 = T(0)$.

Αν $f \neq 0$ τότε $F = \ker f$ κλειστός $\subsetneq H$

(γνήσιος αφού $f \neq 0$, υπόχωρος αφού f γραμμική και κλειστός αφού f συνεχής). Άρα, από παραπάνω πόρισμα $\exists z$: $z \in F^{\perp} = (\ker f)^{\perp}$ με $z \neq 0$. Επίσης, $\forall y \in H$ ισχύει

$f(y)z - f(z)y \in \ker f$ (διότι $f(f(y)z-f(z)y) =$
$= f(y)f(z) - f(z)f(y) = 0$). Άρα, $<\underset{\in F^{\perp}}{z}, \underbrace{f(y)z-f(z)y}_{\in F}> = 0$. $\forall y \in H$

$\Rightarrow f(y)<z,z> - f(z)<z,y> = 0 \Rightarrow f(y) = \frac{f(z)}{<z,z>}<z,y> \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) = < \frac{f(z)}{<z,z>} z, y >$, $\forall y \in H$

Θέτοντας, $x = \frac{f(z)}{<z,z>} z \rightarrow f = f_x \Rightarrow f = T(x) \Rightarrow T$ επί

Ορθοκανονικές βάσεις σε χώρους Hilbert

Ορισμός: Έστω H χώρος Hilbert και έστω S μια ορθοκανονική οικογένεια στον H. Η S λέγεται ορθοκανονική βάση αν δεν περιέχεται γνήσια σε καμία άλλη ορθοκανονική οικογένεια. Δηλαδή, η S είναι μεγιστική (maximal) ορθοκανονική οικογένεια

Πρόταση: Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{E} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία στον H

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $\mathcal{E}$ είναι ορθοκανονική βάση

ii) Αν $x \in H$ και $x \perp e_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$

iii) $\forall x \in H$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} <x, e_n> e_n$

iv) $\forall x, y \in H$: $<x,y> = \sum_{n=1}^{\infty} <x,e_n><y,e_n>$

v) $\forall x \in H$: $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} <x,e_n>^2$

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$: Αν $x \in H$ με $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \neq 0$ τότε η $\mathcal{E} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και περιέχει γνήσια την $\mathcal{E}$ ($\lightning$)

$ii) \Rightarrow iii)$: Θέτουμε $u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ και τότε

$\forall j \in \mathbb{N}$: $\langle u, e_j \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_j \rangle =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \Rightarrow \langle u - x, e_j \rangle = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{\text{υποθ(ii)}} u - x = 0 \Rightarrow u = x$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Πράξεις.

$iv) \Rightarrow v)$: Εφαρμόζουμε το (iv) για $y = x$

$v) \Rightarrow i)$: Έστω $\mathcal{E}$ όχι ορθοκανονική βάση τότε μπορεί να επεκταθεί, δηλ. $\exists x \in H$: $\|x\| = 1$ και $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n$

Οπότε, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ($\lightning$).

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονικό υποσύνολο του H και $F = \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Τότε, $\forall x \in H$ το $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του F στο x.

Απόδειξη

$\langle x - y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_k \rangle =$

$= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$

Άρα, $x - y \perp F \xRightarrow[\text{Παρατήρ. \& } y \in F]{\text{Προηγουμ.}} y$ είναι το πλησιέστερο σημείο του F στο x

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

Αν έχουμε $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό σύνολο, τότε

$$\forall x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$

το οποίο ισχύει από την προηγούμενη πρόταση όντας το $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό σύνολο

Θεώρημα

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert απειροδιάστατος. Τότε έχει μια άπειρη και αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη

Έστω $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ αριθμήσιμο & πυκνό σύνολο

Ορίζουμε $Y = \operatorname{Span} D$ και επαγωγικά διαγράφοντας τα x_n που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων καταλήγουμε στο σύνολο $\{y_1, y_2, \dots, y_n \dots\}$ γραμμ. ανεξάρτητο και έχει

$\operatorname{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \operatorname{Span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$

Άρα, $Y = \operatorname{Span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο Gram-Schmidt "περνάμε" σε μία ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{E}$ για την οποία έχουμε ότι $\operatorname{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \operatorname{Span}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $\forall n$

Ειδικότερα, $\operatorname{Span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{Span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = Y$

Ισχυρισμός: $\mathcal{E}$ ορθοκανονική βάση του H.

Έστω ότι $\mathcal{E}$ όχι ορθοκανονική βάση του H.

Τότε, $\exists x \in H : \|x\| = 1$ τ.ω. $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$Y = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots\}$ πυκνος στον H

Τοτε, $\exists y : y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in Y$ τ.ω $\|x-y\| < \frac{1}{2}$

Τότε, $\langle x, y \rangle = 0$

Αρα, $1 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, x-y \rangle \leq$
$\leq \|x\| \cdot \|x-y\| < \frac{1}{2}$ $(\cancel{\ })$

Θεώρημα :

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομετρικός με τον $\ell^2(\mathbb{N})$.

Αποδ

Έστω H απειροδ. χωρος Hilbert

Απο προηγούμενο Θεώρημα $\exists\, \mathcal{E} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ απειρη και αριθμήσιμη ορθοκανονική βαση του H, $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2$

Ορίζουμε $T : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $T(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

καλά ορισμένη και $\|T(x)\| = \|x\|$

Τέλος, T επι διοτι για τυχουσα $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ για $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in H$ επεται $T(x) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Σημείωση :

Σε έναν απειροδιάστατο Χώρο Hilbert μία ορθοκανονική βάση $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι Hamel.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \leftarrow \text{π.χ}$$

και το x δεν είναι γραμμ. συνδυασμος των $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$